12-11-18

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow \exists \min A, \max A$

Απόδειξη

$\exists \{a_n\} \subseteq A$ ($a_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$) τω $a_n \to \sup A < \infty \Rightarrow$

$\sup A$ είναι σ.σ. του $A \xRightarrow[A' \subseteq A]{A \text{ κλειστό}} \sup A \in A' \Rightarrow$

$\sup A = \max A$

Ομοίως για το $\min A$

Έστω ότι $\{a_n : n \geq n_0\}$ έχει μέγιστο $\forall n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Η $\{a_n\}$ έχει φθίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη

$n_0 = 1$: $\exists k_1 \in \mathbb{N} : a_{k_1} = \max\{a_n : n \geq 1\}$

$n_0 = k_1 + 1$: $\exists k_2 \in \mathbb{N} : a_{k_2} = \max\{a_n : n \geq k_1 + 1\}$

$n_0 = k_2 + 1$: $\exists k_3 \in \mathbb{N} : a_{k_3} = \max\{a_n : n \geq k_2 + 1\}$

Έχουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$

$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \ldots \geq a_{k_n} \geq \ldots$

Έστω $a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=\frac{1}{2}(a_{n-2}+a_{n-1})$, $n\geq 3$

Λύση

$\{a_n\}$ συγκλίνει ανν $\{a_n\}$ Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$,
τ.ω. $\forall n\geq n_0, \forall k\in\mathbb{N}, |a_{n+k}-a_n|<\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$,

$$|a_{n+1}-a_n| = \left|\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)-a_n\right| = \left|\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_n)\right| = \frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}| =$$

$$|a_{n+1}-a_n| = \frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|a_{n-1}-a_{n-2}| =$$

$$\frac{1}{2^3}|a_{n-2}-a_{n-3}| = \dots = \frac{1}{2^{n-1}}|a_2-a_1| \ *$$

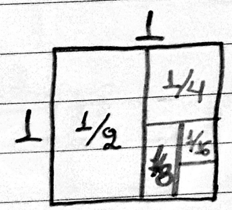
Δείξαμε ότι

$$|a_n-a_{n-1}| = \frac{1}{2^{n-2}}|a_2-a_1|, \quad \forall n\geq 2$$

$$|a_{n+k}-a_n| = |(a_{n+k}-a_{n+k-1})+(a_{n+k-1}-a_{n+k-2})+\dots+(a_{n+1}-a_n)|$$

$$\leq |a_{n+k}-a_{n+k-1}|+\dots+|a_{n+1}-a_n| = \left(\frac{1}{2^{n+k-2}}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)(\underbrace{|a_2-a_1|}_{=1})$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)}_{<1}$$



$*$ Δείξαμε ότι, $\forall n,k\in\mathbb{N}, |a_{n+k}-a_n| < \frac{1}{2^{n-2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0, \frac{1}{2^{n-2}}<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0, |a_{n+k}-a_n|<\varepsilon \Rightarrow \{a_n\}$ Cauchy

Η συνάρτηση a^x $(a>0)$

Αν $x=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0 \Rightarrow a^x=(a^{1/n})^m$

Αν $x\in\mathbb{R}$, $\exists \{p_n\}\subseteq\mathbb{Q}$ τω $p_n\to x$. Τότε ορίζουμε
$a^x=\lim_{n\to\infty} a^{p_n}$

Θεώρημα

Έστω $a>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\{p_n\}\subseteq\mathbb{Q}$ τω. $p_n\to x$. Τότε το $\{a^{p_n}\}$ συγκλίνει
Επίσης, αν $\{\sigma_n\}\subseteq\mathbb{Q}$ τω. $\sigma_n\to x$ ισχύει
$\lim_{n\to\infty} a^{p_n}=\lim_{n\to\infty} a^{\sigma_n}$

Απόδειξη

1ο Βήμα → Αν $p_n\to 0$ τότε $a^{p_n}\to 1$
(Μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα)
Γνωστό → $a^{1/n}\xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ ώ $\forall n\geq n_0$,
$|a^{1/n}-1|<\varepsilon$ $[\varepsilon>0]$
$p_n\to 0 \Rightarrow \exists n_0'\in\mathbb{N}$ τω. $\forall n\geq n_0'$, $-\varepsilon<p_n<\varepsilon$
$|a^{p_n}-1|$
Έστω ότι $a>1$ και $p_n\geq 0 \Rightarrow a^{p_n}\geq 1$. $\exists n_0''\in\mathbb{N}$ τω
$p_n\leq\frac{1}{n_0}$, $\forall n\geq n_0''$

$\Rightarrow |a^{p_n}-1|=a^{p_n}-1\leq a^{1/n_0}-1<\varepsilon$
$\Rightarrow a^{p_n}\to 1$
* Αν $p_n\leq 0 \Rightarrow a^{p_n}\to 1$ ομοίως.
* "Γενική περίπτωση": $\{p_n\}$ έχει και θετικούς και αρνητικούς όρους
Αν η $\{p_n\}$ έχει άπειρους θετικούς όρους τότε η υπακολουθία $\{p_{k_n}\}$ των θετικών όρων της $\{p_n\}$, συγκλίνει στο $0 \Rightarrow a^{p_{k_n}}\to 1 \Rightarrow a^{p_n}\to 1$
Όμοια για τους αρνητικούς όρους.

2ο Βήμα → Έστω ότι $\{p_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{a^{p_n}\}$ συγκλίνει

Απόδειξη

$\{p_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ αν $\forall m,n \geq n_0, |p_m - p_n| < \varepsilon$

$|a^{p_n} - a^{p_m}| = a^{p_m}|a^{p_n - p_m} - 1|$

$\{p_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{p_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists M>0$ τω $-M \leq p_n \leq M$, $\forall n \Rightarrow a^{p_n}$ είναι μεταξύ του a^{-M} κ' $a^{M} \Rightarrow a^{p_n} \leq K$ για κάποιο $K>0$

Αν $m,n \geq n_0 \Rightarrow |p_n - p_m| < \varepsilon \Rightarrow 0 < a^{p_n - p_m} - 1 < a^{\varepsilon} - 1$ όταν $a>1$ (αλλιώς οι ανισότητες αντιστρέφονται)

$\Rightarrow a^{p_n - p_m} - 1 < \delta$ (όπου $\underbrace{\delta = a^{\varepsilon} - 1}_{>0}$)

$\Rightarrow |a^{p_n} - a^{p_m}| < K\delta$ όταν $n \geq n_0$

$\Rightarrow \{a^{p_n}\}$ Cauchy

3ο Βήμα → Αν $p_n, \sigma_n \to x \Rightarrow \lim a^{p_n} = \lim a^{\sigma_n}$

$$\frac{a^{p_n}}{a^{\sigma_n}} = a^{p_n - \sigma_n} \xrightarrow{p_n - \sigma_n \to 0} 1$$

$\Rightarrow \lim a^{p_n} = \lim a^{\sigma_n}$